

OLYMPIADES INTERNATIONALES DE MATHÉMATIQUES

DÉLÉGATION FRANÇAISE

PREMIER JOUR : LUNDI 24 MAI 2004

DURÉE : 4 HEURES 30

*Chaque exercice est noté sur 7 points.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

Exercice 1.

Si n est un entier naturel non nul, on considère l'ensemble $A = \{n, n + 1, n + 2, \dots, n + 17\}$.
Peut-on trouver des valeurs de n pour lesquelles il existe un partage de A en deux ensembles disjoints B et C de telle sorte que le produit des éléments de B soit égal au produit des éléments de C ?

Exercice 2.

Dans un parallélogramme $ABCD$, on se donne M sur $[AB]$ et N sur $[BC]$ de sorte que les segments $[AM]$ et $[CN]$ aient des longueurs égales non nulles. Les droites AN et CM se coupent en Q .
Montrer que DQ est la bissectrice de \widehat{ADC} .

Exercice 3.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, tout point à coordonnées entières est le centre d'un disque de rayon $\frac{1}{1000}$.
Montrer qu'il existe un triangle équilatéral dont les trois sommets sont dans des disques différents.
Montrer qu'un tel triangle a des côtés de longueur plus grande que 96.

OLYMPIADES INTERNATIONALES DE MATHÉMATIQUES

DÉLÉGATION FRANÇAISE

SECOND JOUR : MARDI 25 MAI 2004

DURÉE : 4 HEURES 30

*Chaque exercice est noté sur 7 points.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

Exercice 4.

Soit n un entier naturel non nul.

On considère $2n$ réels strictement positifs a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n vérifiant

$$a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n = 1.$$

Trouver la plus petite valeur de $\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n}$.

Exercice 5.

Le cercle inscrit dans le triangle ABC est tangent aux côtés AB , BC , CA aux points P , Q , R .

Montrer

$$\frac{BC}{PQ} + \frac{CA}{QR} + \frac{AB}{RP} \geq 6.$$

Exercice 6.

On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers.

On considère une partie M de \mathcal{P} ayant au moins trois éléments. On suppose que, pour tout sous-ensemble fini (non vide) strict A de M (c'est-à-dire $A \neq M$), les facteurs premiers de l'entier

$$\left(\prod_{p \in A} p \right) - 1$$

appartiennent à M .

Montrer $M = \mathcal{P}$.

Remarque. On rappelle que $\prod_{p \in A} p$ désigne le produit des éléments de A .

Exercice 1.

L'ensemble A est constitué de 18 entiers consécutifs.

- Si A contient un multiple de 19, celui-ci est unique. Alors, l'un des produits considérés est multiple de 19, et l'autre ne l'est pas car 19 est un nombre premier. Le partage est donc impossible.
- Si A ne contient pas de multiple de 19, alors, modulo 19, A est égal à $\{1, 2, \dots, 18\}$. Soit P le produit des éléments de A .

Avec le théorème de Wilson ou par calcul direct, on obtient $P \equiv 18! \equiv -1 \pmod{19}$.

Or les carrés modulo 19 sont 0, 1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5.

Il en résulte que le partage est impossible : sinon, -1 serait un carré modulo 19, ce qui n'est pas.

Exercice 2.

Notons δ la distance des droites AD et BC et δ' la distance des droites DC et AB .

Notons p, q, r, s les distances de Q aux droites AD, DC, CB, AB .

En termes d'aires :

$$\begin{aligned} 2[AQC] &= 2[AMC] - 2[AMQ] = \delta' AM - s AM \\ &= q AM \\ 2[AQC] &= 2[ANC] - 2[QNC] \\ &= \delta NC - r NC \\ &= p NC \end{aligned}$$

Comme $AM = NC \neq 0$, on obtient que $p = q$, puis que Q est sur la bissectrice de \widehat{ADC} .

Exercice 3.

- Il existe deux entiers a et b strictement positifs tels que $|a\sqrt{3}-b| \leq 10^{-3}$ (voir justification ci-dessous). Le point $(a, a\sqrt{3})$ est donc à une distance d'au plus 10^{-3} du point à coordonnées entières (a, b) .

Les trois points $(0, 0)$, $(2a, 0)$ et $(a, a\sqrt{3})$ sont alors les sommets d'un triangle équilatéral (de côté $2a > 0$) vérifiant les conditions de l'énoncé car deux de ses sommets ont des coordonnées entières et le troisième est dans le disque de centre (a, b) et de rayon 10^{-3} .

Justifions l'existence de a et b .

Soit $E(x)$ la partie entière du réel x et $f(x) = x - E(x)$ sa partie fractionnaire.

L'intervalle $[0, 1[$ est la réunion des 1000 intervalles $[(k-1) \cdot 10^{-3}, k \cdot 10^{-3}[$, pour $1 \leq k \leq 1000$.

Comme \mathbf{N} est infini, il existe deux entiers naturels m et n , avec $m < n$, tels que $f(m\sqrt{3})$ et $f(n\sqrt{3})$ appartiennent à l'un de ces intervalles. Cela entraîne

$$|(n-m)\sqrt{3} - E(n\sqrt{3}) + E(m\sqrt{3})| = |f(n\sqrt{3}) - f(m\sqrt{3})| \leq 10^{-3}$$

et on conclut avec $a = n - m$ et $b = E(n\sqrt{3}) - E(m\sqrt{3})$.

(Une autre méthode consiste à choisir un entier N tel que $(\sqrt{3} - 1)^N \leq 10^{-3}$ et à définir les entiers a et b par la condition $b - a\sqrt{3} = (1 - \sqrt{3})^N$.)

- Soient P', Q', R' un triangle équilatéral vérifiant les conditions de l'énoncé et P, Q, R les points à coordonnées entières centres de disques de rayon 10^{-3} contenant P', Q', R' .

On note l la longueur des côtés de PQR .

On a $l - 2 \cdot 10^{-3} \leq PQ \leq l + 2 \cdot 10^{-3}$ et les relations analogues pour QR et RP .

Il en résulte

$$|PQ^2 - QR^2| = (PQ + QR)|PQ - QR| \leq (2l + 4 \cdot 10^{-3}) \cdot 4 \cdot 10^{-3} \leq 8l \cdot 10^{-3} + 16 \cdot 10^{-6}.$$

Supposons par l'absurde $l \leq 96$.

On obtient aussitôt $|PQ^2 - QR^2| < 1$. Comme P et Q sont à coordonnées entières, PQ^2 et QR^2 sont des entiers et on en déduit $PQ^2 - QR^2 = 0$, donc $PQ = QR$.

De même, $PQ = PR$. Il en résulte que PQR est un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières. Nous allons montrer que cela aboutit à une contradiction.

Soient z_P, z_Q, z_R les affixes des points P, Q, R .

D'une part, la partie imaginaire de $\frac{z_Q - z_P}{z_R - z_P}$ est rationnelle car P, Q, R ont des coordonnées entières ;

d'autre part, elle vaut $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ car PQR est équilatéral.

L'irrationalité de $\sqrt{3}$ fournit la contradiction voulue et permet de conclure que $l > 96$.
(Le raisonnement précédent établit en fait que $l > 124$.)

Exercice 4.

Si u, v, x, y sont des réels strictement positif, alors

$$\frac{x^2}{u} + \frac{y^2}{v} \geq \frac{(x+y)^2}{u+v},$$

car la différence des deux membres s'écrit $\frac{(uy - vx)^2}{uv(u+v)}$.

Par récurrence, on obtient

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{a_1 + \dots + a_n + b_1 + \dots + b_n} = \frac{1}{2},$$

l'égalité étant réalisée pour $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = \frac{1}{n}$.

La valeur minimale est donc $\frac{1}{2}$.

Exercice 5. Posons $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{BCA}$.

On remarque que le triangle APR est isocèle et $PR = 2x \sin \frac{\alpha}{2}$ où $x = AP = AR$.

Notant de même $y = BP = BQ$ et $z = CQ = CR$, il vient $PQ = 2y \sin \frac{\beta}{2}$ et $QR = 2z \sin \frac{\gamma}{2}$.

D'autre part, $AB = x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $BC = y + z \geq 2\sqrt{yz}$, $CA = z + x \geq 2\sqrt{zx}$ en utilisant l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique. Ainsi

$$\frac{BC}{PQ} + \frac{CA}{QR} + \frac{AB}{RP} \geq \frac{\sqrt{yz}}{y \sin \frac{\beta}{2}} + \frac{\sqrt{zx}}{z \sin \frac{\gamma}{2}} + \frac{\sqrt{xy}}{x \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

En utilisant à nouveau l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique (sous la forme $u + v + w \geq 3\sqrt[3]{uvw}$ où u, v, w sont des réels positifs), il vient

$$\frac{BC}{PQ} + \frac{CA}{QR} + \frac{AB}{RP} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}}.$$

La concavité de la fonction $t \mapsto \ln \sin t$ sur $]0, \pi[$ entraîne l'inégalité classique $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$,
puis

$$\frac{BC}{PQ} + \frac{CA}{QR} + \frac{AB}{RP} \geq 6.$$

Exercice 6.

• Comme M contient au moins deux éléments, il contient un nombre premier impair p . En prenant $A = \{p\}$, on voit que 2 appartient à M car 2 divise $p - 1$.

• Soit p un élément de M distinct de 2. Si $p \equiv 1 [3]$, on constate que 3 appartient à M car 3 divise $p - 1$; si $p \equiv 2 [3]$, on voit que 3 appartient à M car 3 divise $2p - 1$; si les deux cas précédents n'ont pas lieu, c'est que p est multiple de 3 donc égal à 3. On conclut que 3 appartient forcément à M .

• Montrons maintenant que M est infini. Supposons donc par l'absurde que M est fini. Notons P le produit des éléments de M .

Soit p un élément de M ; $\frac{P}{p}$ est le produit des éléments de M différents de p donc, d'après l'hypothèse

sur M , le nombre $\frac{P}{p} - 1$ se décompose en produit d'éléments de M ; comme il est premier avec les éléments de M distincts de p , on obtient que c'est une puissance de p .

En particulier $P - 2 = 2^\alpha$ et $P - 3 = 3^\beta$ où α et β sont entiers.

Comme $P \geq 2 \times 3 \times 5 = 30$, on voit que $\alpha \geq 4$; alors $P \equiv 2 \pmod{16}$ et a fortiori, $P \equiv 2 \pmod{8}$. Cela entraîne $3^\beta \equiv -1 \pmod{8}$, ce qui est absurde car 3^β est congru à 1 ou 3 modulo 8 selon la parité de β . Ainsi M est infini.

• Montrons enfin que $M = \mathcal{P}$.

Soit q un nombre premier.

Pour $1 \leq i \leq q + 1$, posons $\pi_i = p_1 p_2 \dots p_i$, où on désigne par p_i le i -ème élément de M .

Il y a $q + 1$ nombres π_i et q classes de congruence modulo q : d'après le principe des tiroirs, il existe $i < j$ tels que $\pi_i \equiv \pi_j \pmod{q}$, ce qui donne

$$p_1 p_2 \dots p_i (p_{i+1} \dots p_j - 1) \equiv 0 \pmod{q}.$$

On est alors dans l'un des deux cas suivants :

(i) q est égal à l'un des p_k , pour $1 \leq k \leq i$;

(ii) q divise $(p_{i+1} \dots p_j - 1)$.

Dans les deux cas, q appartient à M , ce qui permet, q étant quelconque, de conclure que $M = \mathcal{P}$.